b) Soit J_α le centre de S_α, on a $J_\alpha = E*F$ donc $J_\alpha(-\alpha, 0, \alpha)$

on a d'une part $d(J_\alpha, P) = \frac{|-\alpha+0+\alpha-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ et d'autre part le rayon de S_α et $r_\alpha = \frac{EF}{2} = \frac{\sqrt{(\frac{4}{\sqrt{3}})^2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ d'où $d(J_\alpha, P) = r$ ce qui prouve que S_α est tangente à P.

c) * Déterminons les coordonnées de I.

I(x,y,z) est tel que $\begin{cases} \vec{OI} = \alpha_1 \vec{n} \\ I \in P \end{cases}$ où $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ le vecteur normal de P d'où

$$\begin{cases} x = \alpha_1 \\ y = \alpha_1 \\ z = \alpha_1 \\ x+y+z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = \alpha_1 \\ 3\alpha_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{2}{3} \\ x = y = z = \frac{2}{3} \end{cases}$$

d'où $I(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

* Déterminons les coordonnées de J

J(x,y,z) est tel que $\begin{cases} \vec{J_\alpha J} = \beta \vec{n} \\ J \in P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\alpha = \beta \\ y = \beta \\ z-\alpha = \beta \\ x+y+z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta-\alpha \\ y = \beta \\ z = \beta+\alpha \\ x+y+z-2=0 \end{cases}$

En remplaçant dans la dernière équation x, y et z par leurs valeurs on obtient $\beta-\alpha+\beta+\beta+\alpha-2=0$ d'où $3\beta = 2 \Rightarrow \beta = \frac{2}{3}$

d'où $\begin{cases} x = \frac{2}{3} - \alpha \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{2}{3} + \alpha \end{cases}$ donc $J(\frac{2}{3}-\alpha, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}+\alpha)$

$IJ = \sqrt{2} \Leftrightarrow IJ^2 = 2 \Leftrightarrow (\frac{2}{3}-\alpha-\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3}-\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3}+\alpha-\frac{2}{3})^2 = 2$

$\Leftrightarrow 2\alpha^2 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$ ou $\alpha = -1$